Om de lineære Differentialligninger, hvis partikulære Integraler alle ere af samme Form,

meddelt af Professor Dr. **A. Steen.**

I den Selskabet forelagte Meddelelse af 26de Jan. d. A. om lineære Differentialligninger af ovennævnte Beskaffenhed findes en Fejl, hvorpaa polyt. Cand. Lorenz (nu Lærer i Physik ved den Kgl. milit. Højskole) først har henledet Opmærksomheden og hvormed Sammenhængen er følgende.

Man beviser let den Sætning, at to lineære Differentialligninger af n^{te} Orden med Nul paa den ordnede Lignings højre Side, som have de samme partikulære Integraler, i Almindelighed kun kunne være forskjællige ved en Faktor, der føjet til den ene gjør den identisk med den anden*). Men det maa være en Forudsætning herfor, at ingen af Ligningerne i sine Koefficienter indeholder Størrelser, der kunne tillægges forskjællige Værdier uden at Ligningerne ophøre at have Gyldighed. Nu ere de to lineære Differentialligninger af Ordenen $n + 1$, som i den

*) Simplest føres Beviset saaledes. Betegner y_p et af de partikulære Integraler, $y_p^{(q)}$ den q^{te} Differentialkoefficient deraf og

$$\triangle_r = \Sigma\, y_1^{(n)}\, y_2^{(n-1)} \dots y_{n-r}^{(r+1)}\, y_{n-r+1}^{(r-1)} \dots y'_{n-1}\, y_n$$

den af disse Størrelser for $p = 1, 2, \dots n - r, n - r + 1 \dots n$ og $q = n, n - 1, \dots r + 1, r - 1 \dots 0$ dannede Derterminant, saa ville de to lineære Differentialligninger med de almindelige Led $P_{n-r} \dfrac{d^r y}{dx^r}$ og $Q_{n-r} \dfrac{d^r y}{dx^r}$ have sine Koefficienter saaledes bestemte, at

$$\frac{P_0}{\triangle_n} = \frac{P_1}{\triangle_{n-1}} = \dots = \frac{P_{n-r}}{\triangle_r} = \dots = \frac{P_n}{\triangle_0}$$

$$\text{og}\quad \frac{Q_0}{\triangle_n} = \frac{Q_1}{\triangle_{n-1}} = \dots = \frac{Q_{n-r}}{\triangle_r} = \dots = \frac{Q_n}{\triangle_0},$$

hvoraf Sætningen følger, idet

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{P_1}{Q_1} = \dots = \frac{P_{n-r}}{Q_{n-r}} = \dots = \frac{P_n}{Q_n}.$$

nævnte Meddelelse ere betegnede med (8) og (9), netop i den Henseende forskjællige, at den sidste af dem tilfredsstilles for n Værdier af det i Koefficienterne indgaaende m og de tilsvarende partikulære Integraler, medens den første slet ikke har sine Koefficienter afhængige af m.

Den i Ligning (10) fremstillede Slutning er derfor kun forsaavidt rigtig, som den sidste af de ovennævnte Ligninger kan befries fra m i Koefficienterne. Det skal her vises, først hvorvidt denne Fordring kan ske Fyldest og hvorledes derefter det tidligere fremsatte Theorem maa modificeres, og dernæst hvorledes der af dette modificerede Theorem kan udledes et nyt.

1. Den almindelige lineære Differentialligning af n^{te} Orden

$$P\frac{d^n y}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n y = 0, \tag{1}$$

hvor P_n stedse kan gjøres konstant, medens P, P_1, P_2, ... ere Funktioner af x, antages at have alle sine partikulære Integraler af samme Form med Hensyn til x angivet ved

$$y = ce^{\int\frac{dx}{F(m,x)}}, \tag{2}$$

idet m faaer n forskjællige Værdier.

Den hertil svarende Differentialligning af første Orden

$$F(m,x)\frac{dy}{dx} = y \tag{3}$$

gjælder for alle m, men tilhører kun (1), forsaavidt m har de nævnte n Værdier.

Nu kan man ved Differentiation af (1) erholde

$$P\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \left(P_1 + \frac{dP}{dx}\right)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + P_n\frac{dy}{dx} = 0, \tag{4}$$

hvis $n+1$ partikulære Integraler ere dels de n, som tilhøre (1), dels y lig en Konstant. Men man kan ogsaa faae en Differentialligning af $(m+1)^{te}$ Orden med de samme partikulære

Integraler ved at indsætte Udtrykket (3) for y og de deraf udledede Differentialkoefficienter i (1). Man finder da

$$P F(m,x) \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} + \left(P_1 F(m,x) + n P \frac{d. F(m,x)}{dx} \right) \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + P_n F(m,x) \frac{dy}{dx} = o. \quad (5)$$

Saafremt nu $F(m, x)$ indeholder m saaledes, at den kan indgaae alene i en for alle Led i (5) fælles Faktor, der kan bortdivideres, saa har man i (4) og den ved Divisionen ændrede (5) to Differentialligninger med de samme partikulære Integraler, som maae være identiske. Under denne Forudsætning har man da blandt Andet

$$n P \frac{d. F(m,x)}{dx} = F(m,x) \frac{dP}{dx},$$

hvoraf, idet Konstanten kaldes a,

$$F(m,x) = \sqrt[n]{aP}.$$

Denne Form for $F(m, x)$ opfylder den opstillede Fordring, da m ikke forekommer i P, altsaa kun i a. Sættes $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{m}$, faaes den almindelige Form (2) saaledes bestemt

$$y = e^{m \int \frac{dx}{\sqrt[n]{P}}}. \quad (6)$$

2. Betragtes de Former, som kunne være fælles for de partikulære Integraler i (1), naar de skulle indeholde m paa en simpel Maade, navnlig forbundet med en Funktion X af x paa een af de Maader, som gjælder for Konstantens og den uafhængige Variables Forbindelse i de enkelte elementære Funktioner, nemlig

$$m + X, \quad mX, \quad X^m, \quad m^X, \quad \log_m . X, \quad \log_X . m,$$

saa vil man finde, at af disse Former er kun X^m, der stemmer med (6), brugelig som fælles Form for de partikulære Integraler.

De to første Former ville i Virkeligheden give et for ringe Antal partikulære Integraler, naar det fuldstændige reduceres, nemlig henholdsvis

$$y = \Sigma c_r (m_r + X) = \Sigma c_r m_r + X \Sigma c_r,$$

$$\text{og } y = \Sigma\, c_r\, m_r\, X = X\, \Sigma\, c_r\, m_r,$$

hvori der kun forekommer henholdsvis to og eet partikulært Integral.

De to næste Former vise sig ved en lille Omskrivning eens, idet

$$y = m^X = e^{X\,\mathrm{l.}\,m}$$

falder ind under $y = X^m$.

Endelig ville de to sidste falde sammen med den anden, idet, naar l. betegner den naturlige Logarithme,

$$y = \log_m . X = \frac{\mathrm{l.}\,X}{\mathrm{l.}\,m},$$

$$y = \log_X . m = \frac{\mathrm{l.}\,m}{\mathrm{l.}\,X},$$

begge af Formen $y = m\,X$.

Man har altsaa følgende

Theorem.

En lineær Differentialligning af Formen (1), som skal have lutter partikulære Integraler af samme Form

$$y = f(m, X),$$

svarende til forskjællige m, idet f er en af de enkelte elementære Funktioner, saavel af m, som af X (der er Funktion af x), maa have dem alle af Formen

$$y = e^{m\int\frac{dx}{\sqrt[n]{P}}}.$$

3. Man kan dernæst i

$$P\frac{d^n z}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n z = 0,$$

af samme Beskaffenhed som (1), søge P_1 saaledes bestemt, at dens partikulære Integraler alle kunne være af Formen (6), altsaa

$$z = e^{m\int\frac{x}{\sqrt{P}}},$$

saa at man har

$$z = \frac{\sqrt[n]{P}}{m}\,\frac{dz}{dx}.$$

Man behøver hertil blot at sætte Koefficienterne til $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ i de to til (4) og (5) svarende Ligninger ligestore. Derved findes da

$$\frac{n(n-1)}{2} P \frac{d.^2 P^{\frac{1}{n}}}{dx^2} + \frac{n-1}{1} P_1 \frac{d.P^{\frac{1}{n}}}{dx} = P^{\frac{1}{n}} \frac{dP_1}{dx}$$

eller

$$\frac{dP_1}{dx} - \frac{n-1}{1}\frac{d.\,l.\,P^{\frac{1}{n}}}{dx} P_1 = \frac{n(n-1)}{2} P^{1-\frac{1}{n}} \frac{d.^2 P^{\frac{1}{n}}}{dx^2},$$

hvoraf da findes

$$P_1 = \frac{n-1}{2}\frac{dP}{dx} + A P^{\frac{n-1}{n}},$$

idet A er den arbitrære Konstant.

Som Følge heraf maa den Ligning i z, som skal kunne have alle sine Integraler af Formen (6), indeholde følgende Led

$$P\frac{d^n z}{dx^n} + \left(\frac{n-1}{2}\frac{dP}{dx} + A P^{\frac{n-1}{n}}\right)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n z = 0,$$

hvor P_n er konstant.

Indsættes nu heri

$$z = \frac{y}{X},$$

idet X er en ubekjendt Funktion af x, saa findes en Ligning af Formen

$$P\frac{d^n y}{dx^n} - \left(\frac{nP}{X}\frac{dX}{dx} - \frac{n-1}{2}\frac{dP}{dx} - AP^{\frac{n-1}{n}}\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y = 0, \quad (7)$$

hvor der dog kan forekomme flere Led indeholdende y selv.

Ved Hjælp heraf erfares, hvorvidt (1), der i dette Tilfælde i P_n kan indeholde andre end et enkelt konstant Led, hvilket dog stedse maa findes deri, kan have sine partikulære Integraler alle af Formen

$$y = X e^{m\int\frac{dx}{\sqrt[n]{P}}}. \quad (8)$$

I saa Tilfælde maa nemlig (1) falde sammen med (7) (med den antydede Ændring i Beskaffenheden af P_n), saa at man blandt andet har til Bestemmelse af X Differentialligningen

$$\frac{nP}{X}\frac{dX}{dx} - \frac{n-1}{2}\frac{dP}{dx} - AP^{\frac{n-1}{n}} = - P_1,$$

følgelig

$$X = P^{\frac{n-1}{2n}} e^{\frac{A}{n}\int\frac{dx}{\sqrt[n]{P}} - \frac{1}{n}\int\frac{P_1}{P}dx}$$

Derved bliver (8) med m for $\frac{A}{n} + m$ til

$$y = P^{\frac{n-1}{2n}} e^{m\int\frac{dx}{\sqrt[n]{P}} - \frac{1}{n}\int\frac{P_1}{P}dx} \tag{9}$$

Substitution af dette Udtryk i (1) maa give en Ligning i m af n^{te} Grad, hvis alle de partikulære Integraler kunne have denne Form.

Exempler. I Duhamel calc. inf. Paris 1861 tome II. pag. 248 findes

1) $$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + nxy = 0.$$

Efter Division med x faaes af (9)

$$y = \frac{e^{mx}}{x}$$

som giver

$$m^2 + n = 0, \quad y = \frac{c_1 e^{x\sqrt{-n}} + c_2 e^{-x\sqrt{-n}}}{x}.$$

Moigno leç. de calc. diff. & int. Paris 1844 t. II. p. 641 har

2) $$x^4\frac{d^2y}{dx^2} - a = 0,$$

hvortil svarer

$$y = xe^{\frac{m}{x}}, \quad m^2 - a = 0, \quad y = c_1 x e^{\frac{\sqrt{a}}{x}} + c_2 x e^{-\frac{\sqrt{a}}{x}}.$$

3) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2(a + bx)\frac{dy}{dx} + (a_1 + 2abx + b^2x^2)y = 0$$

har Integralet

$$y = e^{mx + ax + \frac{1}{2}bx^2},$$

idet

$$m^2 + a_1 - a^2 + b = 0.$$